

No.3 カントールの対角線論法

この回のゴール

- 対角線論法で $(0, 1)$ が非可算であることを証明できる (小数表示の注意点を含む)。
- カントールの定理 $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ を証明できる。
- 「最大の濃度は存在しない」ことと、ラッセルのパラドックスとのつながりを説明できる。
- 対角線論法を、数列や関数の集合に応用できる。

■ 1. 小数による対角線論法

No.2 では区間縮小法を使って $\mathbb{R}$ が非可算であることを示した。カントールは 1891 年に、もっと短く、しかも応用範囲の広い証明を見つけた。それが対角線論法である。

まず、小数表示についての注意をしておく。 $0.5 = 0.4999\cdots$ のように、有限小数は「9 が無限に続く」表し方ももつ。そこで、9 が無限に続く表し方は使わないと約束すると、 $(0, 1)$ の実数の 10 進小数表示はただ 1 通りに決まる。

定理 1

开区間 $(0, 1)$ は非可算である。

【証明】 $(0, 1)$ が可算だとして、その要素を $x_1, x_2, x_3, \dots$ とめれなく並べ、それぞれを上約束に従って 10 進小数で表す。

$$x_n = 0.a_{n1} a_{n2} a_{n3} \cdots \quad (a_{nk} \text{ は } 0 \sim 9 \text{ の数字})$$

$x_1 = 0.$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	$\cdots$	
$x_2 = 0.$	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	$\cdots$	
$x_3 = 0.$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	$\cdots$	対角線の数字 a_{nn} を すべて変えて y を作る
$x_4 = 0.$	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	$\cdots$	
$x_5 = 0.$	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}	$\cdots$	
$\vdots$								

対角線上の数字 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ に注目し、

$$b_n = \begin{cases} 5 & (a_{nn} \neq 5) \\ 4 & (a_{nn} = 5) \end{cases}$$

として、 $y = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots$ とおく。 y の数字は 4 か 5 だけなので、 $0 < y < 1$ であり、9 が無限に続くこともない。よって y は $(0, 1)$ の要素で、この小数表示は約束どおりのものである。

一方、 y と x_n は小数第 n 位が違う ($b_n \neq a_{nn}$)。どちらも約束どおりの (ただ 1 通りの) 表し方なので、 $y \neq x_n$ である。これがすべての n で成り立つので、 y はどの x_n とも等しくない。 $x_1, x_2, \dots$ が $(0, 1)$ のすべての要素を並べたものだったことに矛盾する。 $\square$

No.2 定理 2 より $(0, 1) \sim \mathbb{R}$ なので、ここから再び「 $\mathbb{R}$ は非可算」が得られる。

なぜ 4 と 5 を使うのか

b_n を「 a_{nn} と違えば何でもよい」とすると、困ることがある。たとえば $y = 0.1999\cdots$ のように 9 が続いてしまうと、 $y = 0.2$ でもあるので、「小数第 n 位が違うから別の数」とは言えなくなる。また、すべて 0 にしてしまうと $y = 0$ となって $(0, 1)$ からはみ出す。0 と 9 を避けて 4, 5 を使えば、こうした心配がなくなる。(2 と 7 など, 0, 9 以外の 2 つならどれでもよい。)

■ 2. 対角線論法の一般形

小数を使わない形にすると、対角線論法の仕組みがよりはっきりする。

定理 2

0 と 1 の値をとる数列全体の集合 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ は非可算である。すなわち、どんな写像 $F: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ も全射でない。

【証明】 $F(n)$ は数列なので、その第 k 項を $F(n)_k$ と書く。数列 s を

$$s_n = 1 - F(n)_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定める (第 n 項を、 $F(n)$ の第 n 項と逆にする)。すると、どの n についても s と $F(n)$ は第 n 項が違うので、 $s \neq F(n)$ 。よって s は F の値域に入らない。□

定理 2 は No.2 定理 4 の $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$ と合わせると、やはり「 $\mathbb{R}$ は非可算」を導く。さらに、次のように一般の集合に広げられる。

定理 3 カントールの定理

どんな集合 A についても、全射 $A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ は存在しない。したがって

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|.$$

【証明】 写像 $F: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ を任意にとる。 $F(a)$ は A の部分集合である。

$$D = \{a \in A \mid a \notin F(a)\}$$

とおく (「自分の行き先に、自分自身が入っていない」要素の集まり)。 $D \subset A$ なので $D \in \mathcal{P}(A)$ である。もし $D = F(d)$ となる $d \in A$ があるとすると、

- $d \in D$ なら、 D の定義より $d \notin F(d) = D$ となり矛盾。
- $d \notin D$ なら、 $d \notin F(d)$ なので D の定義より $d \in D$ となり矛盾。

よって D は F の値域に入らず、 F は全射でない。

また $a \mapsto \{a\}$ は単射 $A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ なので $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ 。全射がないので全単射もなく、 $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ 。□

例 1

$A = \{1, 2, 3\}$, $F(1) = \{1, 2\}$, $F(2) = \{3\}$, $F(3) = \emptyset$ とする. $1 \in F(1)$, $2 \notin F(2)$, $3 \notin F(3)$ なので $D = \{2, 3\}$ で, 確かに D は $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$ のどれとも違う.

$a \in F(a)$ かどうかを 1 / 0 で書いた表を作ると, D は「対角線を反転させたもの」になっている.

	1	2	3
$F(1) = \{1, 2\}$	1	1	0
$F(2) = \{3\}$	0	0	1
$F(3) = \emptyset$	0	0	0
$D = \{2, 3\}$	0	1	1

$A = \mathbb{N}$ のときは, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ により, 定理 3 は定理 2 そのものである.

注意

有限集合なら, 定理 3 は $n < 2^n$ (第 1 章 No.1 定理 3) というだけのことである. 定理 3 のすごさは, **無限集合についても成り立つ点**にある.

■ 3. 最大の濃度はない

カントールの定理をくり返し使うと,

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| < \dots$$

となる. $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$ (No.2 定理 4) なので, $\aleph_0 < \mathfrak{c} < |\mathcal{P}(\mathbb{R})| < \dots$ である. **どんなに大きな集合をもってきても, それより真に大きい濃度の集合がある.** 無限には, 終わりのない階段があるのである.

コラム: 「すべての集合の集合」とラッセルのパラドックス

もし「すべての集合を集めた集合」 V があったとすると, $\mathcal{P}(V)$ の要素はどれも集合なので $\mathcal{P}(V) \subset V$ となり, $|\mathcal{P}(V)| \leq |V|$. これはカントールの定理に反する. そこで, カントールの定理の証明を V と $F(x) = x$ (x が集合なら $x \subset V$ とみなせる) に当てはめると, $D = \{x \mid x \notin x\}$ となる. これは第 1 章 No.1 のコラムに出てきたラッセルのパラドックスの集合そのものである. ラッセルのパラドックスは, 対角線論法から生まれたのである.

■ 4. 対角線論法の応用

対角線論法の型は, 「並べられたものの n 番目を, n 番目の場所でずらして, どれとも違うものを作る」である.

例題 1

自然数の値をとる狭義単調増加数列 ($s_1 < s_2 < s_3 < \dots$) 全体の集合 S は非可算であることを示せ.

【解答】 S が可算だとして, その要素を $s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}, \dots$ と並べる ($s^{(n)}$ の第 k 項を $s_k^{(n)}$ と書く). 数列 t を

$$t_1 = s_1^{(1)} + 1, \quad t_n = \max(t_{n-1}, s_n^{(n)}) + 1 \quad (n \geq 2)$$

で定める. $t_n > t_{n-1}$ なので t は狭義単調増加で, $t \in S$. 一方, $t_n > s_n^{(n)}$ なので, t と $s^{(n)}$ は第 n 項が違い, $t \neq s^{(n)}$. t はどの $s^{(n)}$ とも違うので矛盾.

例題 1 の t は「対角線の値より大きくする」ことで $s^{(n)}$ と区別しつつ、「前の項より大きくする」ことで S の要素になるように作っている．対角線論法では、**作ったものが本当に考えている集合に入るかを必ず確かめる**（定理 1 で $y \in (0, 1)$ を確かめたのと同じ）．

コラム：対角線論法の広がり

対角線論法は、集合論の外でも決定的な役割を果たしている．

- **計算できない数**：コンピュータのプログラムは有限の文字列なので、全部で可算個しかない．よって、プログラムで小数点以下を何桁でも計算できる実数は可算個しかなく、ほとんどすべての実数は「計算できない」．
- **停止問題**：「どんなプログラムについても、それが止まるかどうかを判定するプログラム」は存在しない（チューリング）．証明は対角線論法である．
- **不完全性定理**：ゲーデルは、「この命題は証明できない」という意味をもつ命題を対角線論法のアイデアで作った（分野「数理論理学」第 5 章 No.1）．

対角線論法そのものの美しさは、分野「数学探究」第 4 章 No.4 でも取り上げる．

■ 練習問題

発展 のついた問題は、この回の内容から一步踏み出した発展問題である．最初は飛ばして、ほかの問題が解けてから挑戦するとよい．

1. $(0, 1)$ の実数の並びが次のように始まっているとする．定理 1 の証明の方法で作る y の小数第 5 位までを答えよ．

$$x_1 = 0.31415\cdots, \quad x_2 = 0.50000\cdots, \quad x_3 = 0.27182\cdots, \quad x_4 = 0.14142\cdots, \quad x_5 = 0.55555\cdots$$
2. $A = \{a, b, c\}$, $F(a) = \{a, b\}$, $F(b) = \{a, c\}$, $F(c) = \{b\}$ とする．定理 3 の証明の集合 D を求め、 D が F の値域に入らないことを確かめよ．
3. 自然数の値をとる数列全体の集合 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が非可算であることを、対角線論法で直接示せ．（No.2 練習問題 4 とは別の方法．）
4. 有理数 $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ を $q_1, q_2, \dots$ と並べて定理 1 の証明と同じ方法で y を作っても、矛盾は起きない．なぜか．
5. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像全体の集合 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ について、 $|\mathbb{R}| < |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$ であることを示せ．
6. （考えてみよう） $\mathbb{N}$ の無限部分集合全体の集合 I は非可算であることを示せ．（No.1 練習問題 6 の結果を使ってもよい．）
7. **発展** （考えてみよう） $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$ を示せ．（ヒント： $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ をグラフ $G(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と見る．また No.2 定理 5 を使う．）

■ 練習問題の解答

1. 対角線の数字は $a_{11} = 3, a_{22} = 0, a_{33} = 1, a_{44} = 4, a_{55} = 5$. 5 でないものは 5 に, 5 は 4 にするので, $y = 0.55554\cdots$.
2. $a \in F(a), b \notin F(b), c \notin F(c)$ なので $D = \{b, c\}$. F の値は $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b\}$ で, どれも $\{b, c\}$ と異なる.
3. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が可算だとして, その要素を $f_1, f_2, \dots$ と並べる (f_n は数列 $(f_n(1), f_n(2), \dots)$). $g(n) = f_n(n)+1$ で数列 $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を定めると, $g(n) \neq f_n(n)$ なので, どの n でも $g \neq f_n$. 矛盾.
4. 作った $y = 0.b_1b_2\cdots$ (各桁は 4 か 5) は, どの q_n とも違う実数であるが, **有理数とは限らない**. y が無理数なら, y は「並べた集合 $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ 」の要素ではないので, 「並べたもののどれとも違う要素がある」という矛盾にならない. (実際, $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ は可算なので, 矛盾が起きてはいけない.)
5. $x \mapsto$ (値がつねに x の定数関数) は単射 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ なので $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$. また, $S \subset \mathbb{R}$ に特性関数 χ_S ($x \in S$ なら 1, そうでなければ 0) を対応させると単射 $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ なので, $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$. 定理 3 より $|\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$. よって $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ が対等だとすると, $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ の単射ができ, $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ の単射と合わせてベルンシュタインの定理より $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{R})$ となり矛盾.
6. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = I \cup F$ (F は有限部分集合全体) である. No.1 練習問題 6 より F は可算. I が高々可算なら $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ も高々可算になる (No.1 定理 3 (4)) が, 定理 3 (または No.2 定理 4) に矛盾する.
7. 練習問題 5 の解答より $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$. 逆に, $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ にグラフ $G(f) \subset \mathbb{R}^2$ を対応させる写像 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ は単射である (グラフが同じなら, すべての x で値が同じ). No.2 定理 5 の全単射 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を使うと, $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}), T \mapsto \varphi(T)$ は全単射. よって単射 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ が得られ, ベルンシュタインの定理より $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$.